Tentamen Functionaalanalyse, 2007–2008

Datum : 2 november 2007

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.
Blijf niet eindeloos aan een onderdeel werken. Indien u een onderdeel niet kunt, ga dan gewoon verder en gebruik het resultaat (indien mogelijk).

1. Beschouw een Hilbertruimte H met inprodukt $<,>$.

   (a) Laat ϕ en ψ orthonormale elementen van H, en definieer de operatoren $A : H \to H$ en $B : H \to H$ door

   $$\begin{aligned} Ah &= < h, \phi > \phi, \quad h \in H \\ Bh &= < h, \psi > \psi, \quad h \in H \end{aligned}$$

   Toon aan dat A, B, $A + B$ en $A - B$ begrensde lineaire operatoren zijn.
   Toon aan dat $\| A \| = \| B \| = 1$, en dat $\| A + B \| \leq \sqrt{2}$, $\| A - B \| \leq \sqrt{2}$. Geldt ook gelijkheid voor de laatste twee ongelijkheden ?

   (b) Zoals bekend is de ruimte $B(H)$ van begrensde lineaire operatoren op H met de operatornorm een Banach ruimte. Toon met behulp van onderdeel (a) aan dat de operatornorm *niet* afkomstig is van een inprodukt op $B(H)$, en dat derhalve $B(H)$ *geen* Hilbertruimte is.

2. Beschouw de integraalvergelijking

   $$x(s) - \int_0^1 k(s,t)x(t)dt = y(s), \quad s \in [0,1],$$

   waar $y \in C([0,1])$ en $k \in C([0,1]^2)$ gegeven zijn. We zoeken naar oplossingen x van deze integraalvergelijking. Definiëer de operator $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ door

   $$(Tf)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt$$

   en neem aan dat $\sup_{s,t\in[0,1]} k(s,t) < 1$.

   (a) Bewijs dat $\| T \| < 1$.

   (b) Toon aan dat de integraalvergelijking een unieke oplossing $x \in C([0,1])$ heeft, die wordt gegeven door

   $$x = (I - T)^{-1} y = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y$$

(c) Definiëer inductief

$$k_1(s,t) = k(s,t), \quad k_n(s,t) = \int_0^1 k(s,u)k_{n-1}(u,t)du$$

Bewijs dat

$$(T^n f)(s) = \int_0^1 k_n(s,t)f(t)dt$$

(d) Los met behulp van het voorgaande de volgende integraalvergelijking in de onbekende functie x op:

$$x(s) - \int_0^1 \frac{1}{2}stx(t)dt = \sin \pi s, \quad s \in [0,1].$$

3. Beschouw een Hilbertruimte H, en laat $T \in B(H)$. Bewijs de equivalentie van de volgende beweringen:
   (i) Er bestaat een eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{C}$ van T met $|\lambda| = \| T \|$.
   (ii) Er bestaat een $h \in H$ met $\| h \| = 1$ zodanig dat $\| T \| = | < Th, h > |$.

4. (a) Zij K_1 en K_2 twee deelruimten van een Hilbertruimte H. Toon aan dat

   $$(K_1 + K_2)^\perp = K_1^\perp \cap K_2^\perp$$

   (b) Zij $K \subset H$ een gesloten deelruimte van een Hilbertruimte H, met een gegeven begrensde operator $\lambda : K \to \mathbb{R}$. Volgens de projectiestelling is iedere $x \in H$ eenduidig te schrijven als $x = y + z$, met $y \in K$ en $z \in K^\perp$. Definiëer $P : H \to K$ door $Px = y$, met y als boven. Definiëer nu de uitbreiding $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ als de samenstelling $\Lambda = \lambda P$.
   Bewijs dat $\| \Lambda \| = \| \lambda \|$. Vergelijk deze conclusie met de stelling van Hahn-Banach; wat zijn de overeenkomsten en verschillen in aannames ?
   Toon aan dat $\sigma(\Lambda) = \sigma(\lambda) \cup \{0\}$.

Puntenverdeling:

1. a: 16, b: 9.
2. a: 5, b: 8, c: 5, d: 12.
3. 15.
4. a: 10, b: 10.

   Gratis: 10, Totaal: 100